

LE CALCUL DU MAXIMUM ET LA “DÉRIVÉE” SELON SHARAF AL-DÎN AL-TÛSÎ

NICOLAS FARÈS

0. INTRODUCTION

Le présent article se propose d’analyser les moyens et les techniques utilisés par Sharaf al-Dîn al-Tûsî, lors de son calcul du maximum d’une fonction polynomiale du troisième degré $f(x)$, où apparaît systématiquement une équation équivalente à $f'(x) = 0$.¹ Il ne s’agit pas de revenir sur l’histoire de ces notions mathématiques qui ont été étudiées dans l’ouvrage que R. Rashed a consacré aux travaux mathématiques d’al-Tûsî.² Dans cet ouvrage, l’auteur regroupe les œuvres mathématiques de Sharaf al-Dîn al-Tûsî, qu’il établit, traduit et commente. Son Introduction constitue, à elle seule, une étude approfondie de ces œuvres, à la fois sur le plan mathématique et sur le plan historique.³ Il y met en lumière, en particulier, la présence de l’expression de la dérivée d’une fonction polynomiale du troisième

¹ Il s’agit, en fait, de l’équation $\frac{1}{3} f'(x) = 0$.

² Sharaf al-Dîn al-Tûsî: Œuvres mathématiques. Algèbre et géométrie au XII^e siècle, éd. R. Rashed, Collection Sciences et Philosophie Arabes. Textes et Études, 2 vol. (Paris, 1986). Traduit en arabe par N. Farès, Centre for Arab Unity Studies (Beyrouth, 1995), à paraître. Voir aussi R. Rashed, “Résolution des équations numériques et algèbre. Sharaf al-Dîn al-Tûsî, Viète,” *Archive for History of Exact Sciences*, 12, 3 (1974): 244-90; repris dans Id., *Entre arithmétique et algèbre: Recherches sur l’histoire des mathématiques arabes* (Paris, 1984), Chap. 3, pp. 148-93.

³ Dans C. Houzel, “Sharaf al-Dîn al-Tûsî. Œuvres mathématiques. Algèbre et géométrie au XII^e siècle,” *Gazette des mathématiciens*, 39 (1989): 58-63, on trouve un compte-rendu du livre du même titre.

degré et souligne la fréquence de son utilisation à travers le Traité des équations d'al-Tûsî. Il met l'accent sur le rôle que joue l'expression de la dérivée dans l'étude et le calcul du maximum qu'al-Tûsî effectue pour des fonctions polynomiales du troisième degré et signale sa présence dans des parties du Traité consacrées aux résolutions numériques. De plus, Rashed n'omet pas de donner une interprétation concernant la démarche et les méthodes qu'al-Tûsî aurait utilisées pour arriver à cette expression. Une telle interprétation s'impose parce que, chose curieuse, al-Tûsî n'a révélé aucun élément qui puisse indiquer avec certitude les chemins qui l'avaient conduit à cette expression.

0.1. Interprétation de R. Rashed

Rashed souligne le fait qu'al-Tûsî procède systématiquement de la façon suivante:

1°) Il écrit l'équation polynomiale:

$$(1) \quad g(x) = 0,$$

sous la forme:

$$(1') \quad f(x) = c, \quad \text{où } c = -g(0) > 0; (f(0) = 0).^4$$

2°) Il calcule le maximum $f(x_0)$ de $f(x)$, toujours en postulant que x_0 est une racine d'une équation équivalente à $f'(x) = 0$.⁵

3°) Il affirme que si $c > f(x_0)$, alors (1') n'a pas de racines (réelles positives); si $c = f(x_0)$, elle admet une seule racine (double); enfin, si $c < f(x_0)$, alors (1') admet deux racines x_1 et x_2 telles que:

$$0 < x_1 < x_0 < x_2.$$

⁴ Il s'agit, plus précisément, des équations du troisième degré, pouvant ne pas avoir de solutions (réelles positives) numérotées de 21 à 25 conformément au classement d'al-Tûsî et qui sont les suivantes:

(21) $x^3 + c = ax^2$; (22) $x^3 + c = bx$; (23) $x^3 + ax^2 + c = bx$;

(24) $x^3 + bx + c = ax^2$; (25) $x^3 + c = ax^2 + bx$.

⁵ Il s'agit, en fait, de l'équation $\frac{1}{3} f'(x) = 0$.

L'interprétation de R. Rashed se fonde sur le fait qu'al-fi, s⁷ savait très habilement utiliser les techniques de transformations affines. Il savait, en effet, ramener facilement l'étude d'une équation à celle d'une équation déjà étudiée en utilisant un changement de variable affine. Or, dans de telles transformations ($x = x_0 + X$, $x = x_0 - X$), apparaissent naturellement une certaine forme de "développement de Taylor," évoquée et utilisée par al-Tûsî⁷ à plusieurs reprises et d'une façon systématique. L'idée essentielle de R. Rashed est illustrée par l'équation (23)⁶:

$$(23) \quad bx - ax^2 - x^3 = c,$$

les techniques et les procédés d'al-Tûsî⁷ étant les mêmes pour les autres équations.

Dans le but de calculer la "plus petite racine" ($x_1 = x_0 - X < x_0$), et la "plus grande" racine ($x_2 = x_0 + X > x_0$) de cette équation, al-Tûsî⁷ passe de cette équation aux équations du type (21):

$$(21) \quad x^3 + c = ax^2$$

et du type (15):

$$(15) \quad x^3 + ax^2 = c,$$

respectivement, par les transformations affines:

$$x \rightarrow X = x_0 - x \quad \text{et} \quad x \rightarrow X = x - x_0.$$

Rashed remarque qu'al-Tûsî⁷ utilise, ensuite, les deux expressions:

⁶ Nous respectons, ici, la numérotation des équations adoptée par Rashed conformément à l'ordre suivi par al-fi, s⁷ [Rashed, *Sharaf al-Dîn al-fi, s⁷*. Œuvres mathématiques], pp. XXI.

$$f(x_0) - f(x_0 + X) = 2x_0(x_0 + a)X - (b - x_0^2)X + (3x_0 + a)X^2 + X^3$$

et

$$f(x_0) - f(x_0 - X) = (b - x_0^2)X - 2x_0(x_0 + a)X + (3x_0 + a)X^2 - X^3;$$

il conclut qu'al-Tûsî

a dû comparer $f(x_0)$ à $f(x_0 + X)$ et à $f(x_0 - X)$ en remarquant que les termes $h = (3x_0 + a)X^2 + X^3$ et $h' = (3x_0 + a)X^2 - X^3$ sont positifs sur l'intervalle étudié; il a pu ensuite déduire, des deux égalités que:

$$(b - x_0^2) \leq 2x_0(x_0 + a) \Rightarrow f(x_0) > f(x_0 - X),$$

$$(b - x_0^2) \geq 2x_0(x_0 + a) \Rightarrow f(x_0) > f(x_0 + X),$$

et, par conséquent:

$$(b - x_0^2) = 2x_0(x_0 + a) \Rightarrow \begin{cases} f(x_0) > f(x_0 + X) \\ \text{et} \\ f(x_0) > f(x_0 - X) \end{cases}$$

c'est-à-dire, si x_0 est la racine positive de l'équation

$$f'(x) = b - 2ax - 3x^2 = 0,$$

alors $f(x_0)$ est le maximum de $f(x)$ sur l'intervalle étudié.⁷

1. UNE AUTRE INTERPRÉTATION DU CALCUL DU MAXIMUM

1.0. Aspect analytique implicite dans la démarche d'al-Tûsî

La démarche suivie par al-Tûsî dans le calcul du maximum est la même (dans ces grandes lignes) pour les équations (21)-(25):

1) Il détermine des conditions sur x , pour que l'équation soit "possible"; ce qui revient à considérer

⁷ Rashed, *Sharaf al-Dîn al-fîsî*. Œuvres mathématiques, I, pp. XXIV-XXV.

le domaine \mathbf{D} de définition de f (l'ensemble des nombres réels positifs x tels que $f(x) > 0$).⁸

2) Il annonce au départ la valeur effective de x_0 ($x_0 = v$, où v est une racine d'une équation équivalente à $f'(x) = 0$; (cf. note 1).

3) Il commence la démonstration de cette proposition, en comparant $f(x_0)$ et $f(x)$ et ceci dans chacun des cas suivants:

$$a) \quad x > x_0,$$

$$b) \quad x < x_0;$$

et, dans une première étape, E_1 , du calcul, il ne remplace pas x_0 par sa valeur supposée v (comme si x_0 était inconnue); sa démarche est alors analytique.

Or, si l'on poursuit cette démarche analytique d'al-Tûsî \neg en supposant qu'il ne l'a pas interrompue à un moment donné (c'est-à-dire en supposant toujours x_0 inconnue), on peut déduire le résultat suivant: pour que $f(x_0)$ soit plus grand que $f(x)$ dans chacun des cas a) et b) susmentionnés (c'est-à-dire en fait, pour toutes les valeurs possibles de x), il faut que l'on ait, respectivement, $f'(x_0) \leq 0$ et $f'(x_0) \geq 0$, c'est-à-dire $f'(x_0) = 0$.

Plus précisément, nous allons démontrer, qu'en suivant et prolongeant la partie analytique du raisonnement d'al-Tûsî \neg , on arrive facilement au résultat suivant (x étant toujours dans \mathbf{D}):

$$a') (\forall x > x_0) [f(x) < f(x_0)] \Rightarrow f'(x_0) \leq 0;$$

$$b') (\forall x < x_0) [f(x) < f(x_0)] \Rightarrow f'(x_0) \geq 0;$$

donc

$$(\forall x \neq x_0) [f(x) < f(x_0)] \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

Telle sera notre démarche pour démontrer que x_0 est nécessairement une racine de $f'(x) = 0$, dans les

⁸ \mathbf{D} est bien déterminé pour les équations (21) et (22) où on a respectivement $\mathbf{D} =]0, a[$ et $\mathbf{D} =]0, \sqrt{b}[$; pour les équations (23) et (24), al-fîsî \neg ne donne que des conditions nécessaires pour que $f(x) > 0$. De telles conditions sont absentes pour l'équation (25). En revanche, pour cette dernière, ainsi que pour l'équation (24), il présente une étude qui revient à localiser les deux racines positives.

équations (21)-(25), en précisant, pour chacune de ces équations, le point marquant la fin de l'étape analytique correspondante E_1 .

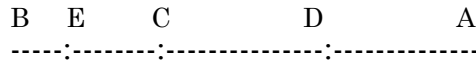
1.1. L'équation 21

Nous allons, conformément aux conventions de 1.0, supposer inconnue la valeur de x_0 .

Du fait que dans l'équation:

$$(21) \quad f(x) = x^2 \cdot (a - x) = c,$$

on a: $c > 0$, al-Tûsî¹ déduit que $0 < x < a$; il prend alors $BA = a$; toute racine de cette équation peut donc être représentée par un segment BD (resp. BE) tel que $D \in [BA]$ (resp. $E \in [BA]$).



Al-Tûsî appelle C le point représentant x_0 ($BC = x_0$) et poursuit suivant le schéma suivant:

a) Cas où $x > x_0$, ($BD > BC$, i.e. $D \in]CA]$).

La relation $f(x) < f(x_0)$ est équivalente à la relation:

$$(I) \quad BD^2 \cdot DA < BC^2 \cdot CA,$$

or

$$f(x_0) = BC^2 \cdot AC = BC^2 \cdot (AD + CD) = BC^2 \cdot AD + BC^2 \cdot CD;$$

$$f(x) = BD^2 \cdot AD = BC^2 \cdot AD + (BD^2 - BC^2) \cdot AD.$$

Donc, on a:

$$\begin{aligned} (I) \quad & \Leftrightarrow (BD^2 - BC^2) \cdot AD < BC^2 \cdot CD \\ & \Leftrightarrow (BD - BC) \cdot (BD + BC) \cdot AD < BC^2 \cdot CD \\ & \Leftrightarrow CD \cdot (BD + BC) \cdot AD < BC^2 \cdot CD \\ & \Leftrightarrow (BD + BC) \cdot AD < BC^2. \end{aligned}$$

(II)

Arrivé en ce point, al-Tûsî interrompt son raisonnement analytique (étape E_1) et remplace x_0 par

sa valeur prédéclarée v , $\left(v = \frac{2a}{3}\right)$. Or, si l'on poursuit sa démarche, en supposant que le raisonnement analytique n'a pas été suspendu, on trouve:

$$\begin{aligned} (II) \quad & \Leftrightarrow (2BC + CD) \cdot AD < BC^2 \\ & \Leftrightarrow BC^2 > CD \cdot AD + 2BC \cdot AD \\ & \Rightarrow BC^2 > 2BC \cdot AD. \\ & \Rightarrow BC > 2AD. \end{aligned}$$

(III)

Cette dernière relation, (III), étant vraie quelle que soit la position du point D sur le segment $[AC]$, implique

$$BC \geq 2AC$$

c'est-à-dire,

$$x_0 \geq 2(a - x_0),$$

ou aussi

$$x_0 \geq \frac{2a}{3}$$

(IV)

b) Cas où $x < x_0$.

Dans ce cas, tout point $E \in [BC[$, ($BE = x < BC = x_0$), peut représenter x et l'on a:

$$f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow BE^2 \cdot EA < BC^2 \cdot CA, \\ (I')$$

or,

$$\begin{aligned} f(x_0) &= BC^2 \cdot AC = BE^2 \cdot AC + (BC^2 - BE^2) \cdot AC \\ &= BE^2 \cdot AC + (BC + BE) \cdot EC \cdot AC, \\ f(x) &= BE^2 \cdot AE = BE^2 \cdot AC + BE^2 \cdot CE. \end{aligned}$$

Donc, on a:

$$\begin{aligned} (I') \quad &\Leftrightarrow BE^2 \cdot CE < (BC + BE) \cdot AC \cdot CE \\ &\Leftrightarrow BE^2 < (BC + BE) \cdot AC \end{aligned}$$

(II')

et c'est ici qu'al-Tûsî interrompt sa démarche analytique qui, une fois poursuivie, donnerait:

$$\begin{aligned} (II') \quad &\Leftrightarrow BE^2 < (2BC - EC) \cdot AC \\ &\Leftrightarrow 2BC \cdot AC > BE^2 + EC \cdot AC \\ &\Rightarrow 2BC \cdot AC > BE^2 \end{aligned}$$

(III')

Cette dernière relation, (III'), étant vraie quelle que soit la position du point E sur le segment $[BC[$, implique

$$2BC \cdot AC \geq BC^2$$

ou encore

$$2AC \geq BC$$

c'est-à-dire

$$2(a - x_0) \geq x_0 ,$$

ou encore

$$x_0 \leq \frac{2a}{3}$$

(IV').

Les relations (IV) et (IV') prouvent que $x_0 = \frac{2a}{3}$.

1.2. L'équation 22

Dorénavant, nous allons, conformément à ce que fait R. Rashed dans ses commentaires, adopter, le plus souvent, une écriture symbolique moderne, ce qui ne modifie nullement les propos d'al-Tûsî.

Du fait que dans l'équation

$$(22) \quad f(x) = x(b - x^2) = c,$$

on a: $c > 0$, al-Tûsî déduit que $0 < x < \sqrt{b}$; il prend alors $AB = \sqrt{b}$; toute racine de cette équation peut donc être représentée par un segment AI (resp. AJ) tel que I (resp. J) appartient à $[AB]$.

Soit E le point de $[AB]$ tel que $AE = x_0$ (x_0 étant la valeur – inconnue – telle que $f(x)$ atteint son maximum en $x = x_0$).

$$\begin{array}{ccccccc} A & J & E & I & B \\ \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} \end{array}$$

a) Cas où $x > x_0$. ($AE < AI = x$). Dans ce cas, $I \in]EB]$ et l'on a:

$$\begin{aligned} f(x) < f(x_0) &\Leftrightarrow AI \cdot (AB^2 - AI^2) < AE \cdot (AB^2 - AE^2) \\ &\Leftrightarrow x(b - x^2) < x_0(b - x_0^2) \end{aligned}$$

(I)

Or, on a

$$\begin{aligned} f(x_0) &= (b - x_0^2)x_0 = (b - x^2)x_0 + (x^2 - x_0^2)x_0, \\ f(x) &= (b - x^2)x = (b - x^2)x_0 + (b - x^2)(x - x_0). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow (b - x^2)(x - x_0) < (x^2 - x_0^2)x_0 \quad (\text{II})$$

À cette étape al-Tûsî⁹ interrompt sa démarche analytique qui, une fois poursuivie, donnerait:

$$\begin{aligned} (\text{II}) \quad &\Leftrightarrow (b - x^2) < (x + x_0)x_0 \\ &\Leftrightarrow b < x^2 + x_0^2 + x \cdot x_0 \end{aligned}$$

et, comme $x_0 < x$, cette dernière relation donne:

$$(\text{III}) \quad b < 3x^2.$$

Cela étant vrai pour tout $x > x_0$ (c'est-à-dire pour tout $I \in]EB]$), il en résulte:

$$(\text{IV}) \quad b \leq 3x_0^2.$$

b) Cas où $x < x_0$; ($AJ = x < AE$); $J \in [AE[$.

Bien qu'al-Tûsî⁹ n'ait pas commencé par une démarche analytique pour démontrer que $3x_0^2 \leq b$, on peut imaginer une telle démarche, symétrique de celle rencontrée dans a). Cela est bien conforme à la démarche d'al-Tûsî⁹ rencontrée lors de l'étude du maximum de l'équation 21 (voir 1.1, plus haut) et qui est, pratiquement, la même pour les équations (23), (24) et (25)⁹:

En supposant x_0 inconnu, on a:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= (b - x_0^2)x_0 = (b - x_0^2)x + (b - x_0^2)(x_0 - x), \\ f(x) &= (b - x^2)x = (b - x_0^2)x + (x_0^2 - x^2)x; \end{aligned}$$

ainsi, on a:

⁹ L'étape analytique manque dans le 3^e cas ($a < \sqrt{b}$) de l'équation 25.

$$f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow (x_0^2 - x^2)x < (b - x_0^2)(x_0 - x) \\ (II)$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x(x + x_0) < (b - x_0^2) \\ &\Leftrightarrow AJ.(AE + AJ) < AB^2 - AE^2 \\ &\Leftrightarrow AJ.AE + AJ^2 + AE^2 < AB^2 \\ &\Rightarrow 3AJ^2 < AB^2 \text{ (car } AJ < AE). \end{aligned}$$

Cette dernière relation, étant vraie pour tout $J \in [AE[$, implique

$$3AE^2 \leq AB^2$$

c'est-à-dire

$$(IV') \quad 3x_0^2 \leq b.$$

Les relations (IV) et (IV') donnent: $3x_0^2 = b$.

1.3. L'équation 23

Pour l'équation

$$(23) \quad x^3 + ax^2 + c = bx,$$

on a:

$$\begin{aligned} f(x) &= bx - ax^2 - x^3 = (b - x^2)x - ax^2, \\ f(x_0) &= bx_0 - ax_0^2 - x_0^3 = (b - x_0^2)x_0 - \end{aligned}$$

ax_0^2 ;

Al-Tûsî¹ démontre qu'on doit avoir $x^2 < b$. Ensuite il prend $BA = \sqrt{b}$; toute racine de cette équation peut donc être représentée par un segment BJ (resp. BM) tel que J (resp. M) appartient à $[BA]$.

Soit E le point de $[AB]$ tel que $BE = x_0$, (x_0 étant la valeur – inconnue – telle que $f(x)$ atteint son maximum en $x = x_0$).

$$\begin{array}{ccccccc} B & & M & & E & & J & & & & A \\ \hline & & & & & & & & & & \end{array}$$

a) Cas où $x = BJ > BE = x_0$. Al-Tûsî suit la démarche suivante:

$$\begin{aligned}(b - x_0^2)x_0 &= (b - x^2)x_0 + (x^2 - x_0^2)x_0 \\ (b - x^2)x &= (b - x^2)x_0 + (b - x^2)(x - x_0) \\ ax^2 &= ax_0^2 + a(x^2 - x_0^2) > ax_0^2;\end{aligned}$$

d'où il déduit, après une assez longue explication:

$$(II) \quad f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow (x + x_0)(a + x_0) > b - x^2.$$

Il interrompt ici sa démarche analytique qui, poursuivie, donnerait:

$$\begin{aligned}(II) \quad &\Leftrightarrow (x + x_0)(a + x_0) + x^2 > b \\ &\Rightarrow 2x(a + x) + x^2 > b \\ &\Rightarrow 3x^2 + 2ax > b.\end{aligned}$$

Cette relation, étant vraie pour tout $x > x_0$, implique:

$$(IV) \quad 3x_0^2 + 2ax_0 \geq b.$$

b) Cas où $x < x_0$; ($BM = x < BE$); $M \in [BE[$. Al-Tûsî suit la démarche suivante:

$$\begin{aligned}(b - x_0^2)x_0 &= (b - x_0^2)x + (b - x_0^2)(x_0 - x), \\ (b - x^2)x &= (b - x_0^2)x + (x_0^2 - x^2)x, \\ ax_0^2 &= ax^2 + a(x_0^2 - x^2) > ax^2;\end{aligned}$$

d'où il déduit, après une assez longue explication:

$$(II') \quad f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow (b - x_0^2)(x_0 - x) - a(x_0^2 - x^2) > (x_0^2 - x^2)x.$$

Il interrompt ici sa démarche analytique qui, poursuivie, donnerait:

$$\begin{aligned}
(\text{II}') &\Leftrightarrow (x + x_0)x < (b - x_0^2) - a(x_0 + x) \\
&\Leftrightarrow x_0^2 + (x + x_0)x + a(x_0 + x) < b \\
&\Rightarrow 3x^2 + 2ax < b.
\end{aligned}$$

Cette relation, étant vraie pour tout $x < x_0$, implique:

$$(\text{IV}') \quad 3x_0^2 + 2ax_0 \leq b.$$

Les relations (IV) et (IV') donnent: $3x_0^2 + 2ax_0 = b$.

1.4. Les équations 24 et 25

Il est inutile de reprendre ici les calculs d'al-Tûsî correspondant aux équations:

$$(24) \quad ax^2 - bx - x^3 = c$$

et

$$(25) \quad bx + ax^2 - x^3 = c,$$

parce que les processus utilisés sont, pratiquement, ceux des équations précédentes (voir 1.0). Notons toutefois qu'al-Tûsî étudie l'équation (25) en considérant trois cas. Dans chacun de ces cas il suit le schéma décrit dans 1.0; l'étape analytique E_1 se trouve soit assez développée soit réduite, suivant le degré de complexité des calculs exigés par le cas étudié.¹⁰

2. REMARQUES

2.1. — En partant du fait qu'al-Tûsî savait très bien utiliser les transformations affines, on pourrait penser que trouver le maximum de la fonction $f(x) = x^2(a - x)$ relative à l'équation (21), lui était suffisant pour en déduire les maxima des fonctions correspondant aux équations (22), (23), (24) et (25).

¹⁰ Voir note 9.

En effet, en supposant connue la valeur $x_0 = \frac{2a}{3}$, pour laquelle cette fonction atteint son maximum, on a:

1/ En ce qui concerne l'équation (22), on peut écrire

$$f(x) = bx - x^3 = AY^2 - Y^3 + H$$

où:

$$A = 3 \cdot \sqrt{\frac{b}{3}}; \quad Y = x + \sqrt{\frac{b}{3}}; \quad H = -2 \cdot \left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{3}{2}};$$

et, du fait que H est une constante, la fonction

$$f(x) = AY^2 - Y^3 + H = g(Y) + H$$

atteint son maximum si et seulement si g(Y) atteint le sien. Or, d'après l'étude de l'équation (21), la fonction g(Y) = (AY² - Y³) atteint son maximum pour

$$Y = \frac{2A}{3}$$

c'est-à-dire pour

$$x + \sqrt{\frac{b}{3}} = \frac{2}{3} \cdot 3 \sqrt{\frac{b}{3}}$$

c'est-à-dire pour

$$x = \sqrt{\frac{b}{3}}.$$

2/ En ce qui concerne l'équation (23), on peut écrire:

$$f(x) = bx - ax^2 - x^3 = -\left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + \left(b + \frac{a^2}{3}\right)\left(x + \frac{a}{3}\right) + H,$$

(où $H = -\left(\frac{9ab + 2a^3}{27}\right)$). En posant $Y = x + \frac{a}{3}$, B
 $= \left(b + \frac{a^2}{3}\right)$ on peut écrire:
 $f(x) = -Y^3 + BY + H.$

Or, H étant constante, $f(x)$ atteint son maximum si et seulement si $BY - Y^3$ atteint le sien. Un tel maximum est, d'après l'étude de l'équation (22), atteint pour

$$(2) \quad Y^2 = \frac{B}{3}.$$

Or, on a:

$$(2) \quad \Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} \left(b + \frac{a^2}{3}\right) \Leftrightarrow x^2 + \frac{2a}{3}x = \frac{b}{3}$$

et cette dernière relation est exactement la forme présentée par al-Tûsî.¹¹

3/ En ce qui concerne l'équation (24), on a

$$f(x) = ax^2 - bx - x^3 = -\left(x - \frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{a^2}{3} - b\right)\left(x - \frac{a}{3}\right) + H$$

(où $H = -\left(\frac{9ab - 2a^3}{27}\right)$). En posant $Y = x - \frac{a}{3}$, $B = \left(\frac{a^2}{3} - b\right)$, on peut écrire:

$$f(x) = -Y^3 + BY + H.$$

De même, H étant constante, $f(x)$ atteint son maximum si et seulement si la fonction $-Y^3 + bY$ atteint le sien. Or $B > 0$ (d'ailleurs, al-Tûsî lui-même, au début de l'étude de cette équation, remarque que b doit être inférieur à $\frac{a^2}{4}$). On se trouve, ainsi, en

¹¹ Le fait d'aboutir à la forme présentée par al-fîsî ne constitue pas un argument en faveur d'une éventuelle voie d'interprétation offerte par la remarque 2.1. En effet, il était dans la tradition, de présenter les équations du second degré sous leur forme normalisée. L'interprétation présentée au §1 a l'avantage d'être fidèle non seulement au style mais surtout aux textes mêmes d'al-fîsî.

présence du même problème que celui de l'équation

(22). Ce maximum est donc atteint pour $Y^2 = \frac{B}{3}$, c'est-à-dire pour

$$\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{a^2}{3} - b\right)$$

ou aussi

$$x^2 + \frac{b}{3} = \frac{2a}{3}x \quad \left(\frac{1}{3}f'(x) = 0\right).$$

4/ De la même façon, pour l'équation (25), on a:

$$f(x) = ax^2 + bx - x^3 = \left(b + \frac{a^2}{3}\right)\left(x - \frac{a}{3}\right) - \left(x - \frac{a}{3}\right)^3 + H$$

(où $H = \left(\frac{9ab + 2a^3}{27}\right)$) et, en posant $Y = x - \frac{a}{3}$, $B = \left(b + \frac{a^2}{3}\right)$, on a:

$$f(x) = BY - Y^3 + H.$$

Or, H étant constante, f(x) atteint son maximum si et seulement si $BY - Y^3$ atteint le sien. Un tel maximum est, d'après l'étude de l'équation (22), atteint pour

$$(2) \quad Y^2 = \frac{B}{3},$$

c'est-à-dire pour x racine de l'équation:

$$\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} \left(b + \frac{a^2}{3}\right),$$

équivalente à:

$$x^2 = \frac{2a}{3}x + \frac{b}{3},$$

qui est exactement la forme présentée par al-Tûsî¹.

2.2. – Bien que les points de départ soient distincts, notre interprétation (§1) ne contredit pas celle de R. Rashed (0.1), qui se fonde sur l'aisance qu'avait al-Tûsî¹ à manipuler les changements de variables affines. Malgré les apparences, nous pouvons rapprocher les résultats obtenus.

En effet, Rashed se fonde sur l'expression de $f(x_0) - f(x_0 + X)$, où $(x_0 + X)$ est la plus grande racine et sur celle de $f(x_0) - f(x_0 - X)$, où $(x_0 - X)$ est la plus petite racine de l'équation $f(x) = c$. Quant à notre approche présentée ci-dessus, elle prend appui sur la comparaison que fait al-Tûsî¹ entre $f(x_0)$ et $f(x)$ dans chacun des cas: a) $x > x_0$, et b) $x < x_0$, c'est-à-dire dans chacun des cas:

$$a') x = x_0 + X$$

et

$$b') x = x_0 - X,$$

où $X > 0$, ce qui engendre des calculs qui s'harmonisent d'une façon ou d'une autre avec ceux de Rashed, même si x n'est ni la plus grande racine (cas a') ni la plus petite (cas b').

Pour illustrer cette idée, reformulons à titre d'exemple, le cas a) de l'équation (21) et le cas b) de l'équation (23) en posant $x = x_0 + X (> x_0)$ dans le premier cas et $x = x_0 - X (< x_0)$ dans le second.

1^o Cf. 1.1, équation (21), a) cas où $x > x_0$.

Si nous reprenons exactement le même schéma de raisonnement, avec $BC = x_0$; $BD = x = x_0 + X$; $AB = a$; ($DA = a - x$; $CD = X$), alors les relations qui s'y trouvent prennent la forme suivante:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= x_0^2 (a - x_0) = x_0^2 (a - x) + x_0^2 (x - x_0) \\ f(x) &= x^2 (a - x) = x_0^2 (a - x) + (x^2 - x_0^2) (a - x) \end{aligned}$$

et l'on a:

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad f(x) < f(x_0) &\Leftrightarrow (x^2 - x_0^2)(a - x) < x_0^2(x - x_0) \\
 &\Leftrightarrow (x - x_0)(x + x_0)(a - x) < x_0^2(x - x_0) \\
 &\Leftrightarrow (x + x_0)(a - x) < x_0^2 \\
 &\Leftrightarrow (2x_0 + X)(a - x_0 - X) < x_0^2 \\
 &\Leftrightarrow 3x_0^2 > 2ax_0 - X(3x_0 + X) + aX \\
 &\Rightarrow 3x_0^2 > 2ax_0 - X(3x_0 + X).
 \end{aligned}$$

Cette dernière relation, étant vraie pour toute valeur de X telle que $(0 < X < a - x_0)$, implique

$$3x_0^2 \geq 2ax_0$$

c'est-à-dire

$$x_0 \geq \frac{2a}{3}.$$

2^e, Cf. 1.3, équation (23), b) cas où $x < x_0$; ($x = x_0 - X$).

Il suffit, ici, de reprendre le même schéma, pour obtenir:

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad f(x) < f(x_0) &\Leftrightarrow \text{-----} \\
 &\Leftrightarrow (b - x_0^2) > (x_0 + x)(a + x) \\
 &\Leftrightarrow (b - x_0^2) > (2x_0 - X)(a + x_0 - X) \\
 &\Leftrightarrow b > 3x_0^2 + 2ax_0 - X \cdot H
 \end{aligned}$$

(III')

où $H = (a + 3x_0 - X)$ est positive, majorée par $(a + 3\sqrt{b})$; ($x_0 < \sqrt{b}$ et $0 < X < x_0$). Cette relation, étant vraie pour tout X , ($0 < X < x_0$), implique:

$$b \geq 3x_0^2 + 2ax_0$$

(IV')

2.3. (Tentative d'interprétation géométrique) – Au terme de cette approche, nous jugeons bon d'avouer que notre abord initial était essentiellement géométrique car,

sous l'influence des représentations et de la terminologie d'al-Tûsî¹² concernant les équations:

$$(21) \quad f(x) = x^2(a - x) = c$$

et

$$(22) \quad f(x) = x(b - x^2) = c,$$

nous avons focalisé notre recherche sur les calculs du maximum du volume “solide” $x^2(a - x)$ (parallélépipède) et celui du volume, “gnomon,” $x(b - x^2)$; l'étude du maximum des autres fonctions considérées par al-Tûsî¹² pouvant en découler (voir remarque 1).

Cette tentative d'explication géométrique a été favorisée par l'étude de l'équation:

$$(9) \quad f(x) = x(a - x) = c$$

qui, parmi les vingt premières équations de la première partie du Traité, est la seule pouvant ne pas admettre de racines (réelles positives). D'ailleurs, al-Tûsî¹² lui-même admettait, comme un résultat classique connu, la valeur du maximum de la fonction $f(x) = x(a - x)$: “car le carré de la moitié est plus grand que le produit de l'un des segments par l'autre.”¹² Un lecteur non averti serait, ainsi, tenté de déduire la

$\frac{a}{2}$
valeur $x = \frac{a}{2}$, pour laquelle $f(x)$ atteint son maximum, en utilisant les procédés des Données d'Euclide et d'essayer de procéder par analogie pour l'étude des équations 21 et 22.

Or, il s'est avéré que cette tentative est stérile, voire incorrecte. En effet, aucun indice d'un raisonnement géométrique ne peut être signalé chez al-Tûsî¹² dans son étude de ces deux équations. Quant aux procédés

¹² Rashed, *Sharaf al-Dîn al-fîsî*. Œuvres mathématiques, I, p. 32. Ce résultat peut être considéré comme une conséquence de la prop. 5 du Livre II des Éléments [cf. Euclide, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Translated with Introduction and Commentary by Th. Heath, 3 vol., Republication of the second edition (New York, 1956), t. I, p. 382-3].

calculatoires algébriques, ils y sont dominants. Cette constatation se trouve renforcée par le fait que dans les équations (23), (24) et (25), les représentations géométriques ne contiennent aucune figure “dans l’espace”; tout raisonnement géométrique sur les volumes est ainsi écarté.

De plus, alors que dans les équations (9), (21) et (22), x_0 est donnée par sa valeur effective, elle est présentée dans les équations (23), (24) et (25), sans aucune ambiguïté, comme “racine de l’équation...” $f'(x) = 0$. Aussi, les termes utilisés ne sont-ils nullement géométriques. Tous ces arguments confirment l’affirmation de R. Rashed dans son Introduction: “les figures géométriques ne sont là que pour aider l’imagination,”¹³ et tendent à prouver que cette affirmation s’étend aussi aux calculs qui ont conduit al-Tûsî à l’expression de la dérivée.

Notons, enfin, que la présence des figures et des représentations des objets intervenant dans les calculs, comblaient certaines lacunes causées par l’absence de symbolisme. Et Rashed a raison de signaler dans l’Introduction,¹⁴ que la multitude de schémas, surtout en ce qui concerne l’équation (25), est due à l’ignorance des nombres négatifs.

3. CONCLUSION

Les réflexions que nous venons d’exposer peuvent apporter une contribution à une problématique posée par R. Rashed visant à élucider les moyens et les techniques qui ont conduit al-Tûsî à mettre en valeur l’expression de la dérivée et à s’en servir adéquatement dans le calcul du maximum. Il est utile de rappeler, même au prix de quelques redites, deux thèmes essentiels de l’étude de Rashed concernant ce sujet:

¹³ Rashed, *Sharaf al-Dîn al-fî, s*. Œuvres mathématiques, I, p. XXVII.

¹⁴ Ibid., I, p. XXVI.

-La présence de l'expression de la dérivée dans la mathématique d'al-Tûsî "n'est ni fortuite, ni secondaire, mais au contraire intentionnelle."¹⁵

-Les questions qui ont pu conduire al-Tûsî à mettre en valeur cette expression relèvent de l'analyse mathématique pure: calcul du maximum d'une fonction polynomiale, auquel al-Tûsî a même donné une dénomination "le plus grand nombre." Ses travaux récemment découverts prouvent que la première ébauche dans ce chapitre de l'analyse a commencé au XII^e siècle déjà.

Il est vrai que le point de départ et les motifs d'al-Tûsî ne sont pas ceux qui ont mené Newton à la notion de "fluxion" ou Leibniz à l'expression dénommée plus tard "dérivée." Ses travaux dans ce domaine présentent, pourtant, une étroite ressemblance avec ceux de Fermat, comme l'a démontré R. Rashed. Celui-ci indique qu'il est "encore trop tôt pour connaître la portée exacte du Traité d'al-Tûsî et l'influence qu'il exerça sur les mathématiques, aussi bien en Orient qu'en Occident."¹⁶ Dans cette même note, Rashed suggère en outre, que tout donne à penser que les successeurs arabes ou orientaux d'al-Tûsî n'ont pas fait franchir des progrès essentiels aux notions développées par leur prédécesseur. Il cite, à ce propos, une œuvre d'un mathématicien iranien du XIX^e siècle qu'il est le premier à étudier (*Takmilat al-'uyûn*, Université de Téhéran, MS 3552, par M-rz® 'Al- MuQammad al-Afah®), et montre que cette œuvre reprend certaines méthodes de calcul d'al-Tûsî.

Il semble, enfin, qu'en étudiant le maximum d'une fonction polynomiale, al-Tûsî fasse implicitement appel à la croissance et à la décroissance de cette fonction sur un intervalle donné. C'est ce qui lui a sans doute permis d'avancer que la fonction $f(x)$ correspondante à chacune des équations étudiées,

¹⁵ Ibid., I, p. XXIII.

¹⁶ Ibid., I, Notes complémentaires 2.9.

admet, dans l'intervalle considéré, un seul extremum (donc deux racines seulement). En étudiant l'équation (21), l'attention d'al-Tûsî¹⁷ était, vraisemblablement, dirigée sur la croissance de $f(x)$ pour $x < x_0$ et sur sa décroissance pour $x > x_0$.¹⁷ S'il n'a pas évoqué ces notions de façon explicite, c'est probablement parce que le Traité avait un but bien déterminé: résoudre les équations polynomiales de degré inférieur ou égal à 3. Le caractère intentionnellement limité de cette démarche se laisse aussi trahir dans la partie du Traité concernant la "géométrie analytique" où, comme l'indique Rashed, al-Tûsî¹⁸ n'a envisagé "les équations de ces courbes que dans les conditions qui suffisent à l'usage auquel elles sont destinées."¹⁸

Au terme de notre étude, nous espérons avoir dégagé certains aspects analytiques implicites dans le raisonnement d'al-Tûsî¹⁸ et avoir contribué à dévoiler sa méthode de calcul du maximum d'une expression polynomiale. Sa conception du maximum peut s'appliquer à toutes sortes de fonctions continues dans un intervalle donné. Il est clair, toutefois, que le présent travail, vu son point de départ, n'apporte pas de nouveaux éléments concernant certaines conjectures déjà proposées (notamment l'annulation du coefficient de X dans le développement de $f(x_0 + X)$).¹⁹ Nous estimons que de tels éléments concernant les aspects analytiques du Traité, pourraient être dégagés par une étude de la présence de l'expression de $f'(x)$ (cette fois pour x déterminé) dans les méthodes numériques d'al-Tûsî¹⁸. Cela contribuerait à définir et situer avec plus de précision les aspects analytiques de cette mathématique du XII^e siècle.*

¹⁷ Ibid., I, p. XVII, lemme 2.

¹⁸ Ibid., I, p. XIX.

¹⁹ Cf. Houzel, "Sharaf al-Dîn al-fîsî. Œuvres mathématiques," (cité note 3).

* Je remercie MM. les Professeurs B. El Mabsout (Université de Paris VI) et C. Houzel (Université de Paris VII) d'avoir bien voulu relire cet article et de m'avoir fait part de leurs observations.